数理解析研究所講究録
349巻 1979年 96-106

Instantons とその複素領域に於ける poles.

京大 数理研　村瀬 元彦

§. 1.

(Anti-) self-dual Yang-Mills 方程式の 1-instanton solution はこれまでに知られている解ですべて尽くされることが様々な方法で証明されている。ここでは [4] に述べられた定理を用いてそれを示してみよう

Anti-self-dual Yang-Mills 方程式とは, $su(2)$-値 vector potential A_μ ($\mu=0,1,2,3$) に対する方程式

(1) $F_{\mu\nu} \underset{def}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

(2) $\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = - F_{\mu\nu}$

のことである. $\mathbb{R}^4$ の座標 x_0, x_1, x_2, x_3 を固定して,

$$A = \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu dx_\mu , \qquad F = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$$

と書けば, これは

(1) $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$

(2) $*F = -F$　　($*$ は Hodge star operator)

とも表わされる．x_0をx_4と書き直し，向きもこめてx_1, x_2, x_3, x_4を座標にとれば，(1), (2) の解 A は self-dual 方程式 $F = *F$ の解になるので，以下では座標を fix し anti-self-dual 方程式のみを扱う．

物理学者達がこの方程式を解くときに用いた手法は次の通りである．[5]．

$$\overline{\sigma_{12}} = \overline{\sigma_{03}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\sigma_{13}} = -\overline{\sigma_{02}} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\sigma_{23}} = \overline{\sigma_{01}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\overline{\sigma} \underset{\text{def}}{=} -i \sum_{\mu<\nu} \overline{\sigma_{\mu\nu}}\, dx_\mu \wedge dx_\nu$$

を作る．$\overline{\sigma}$ は constant $su(2)$-valued self-dual 2-form である．今，実数値 1-form $a = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu dx_\mu$ によって

$$\text{(3)} \quad A = *(a \wedge \overline{\sigma})$$

と表わされる様な A を考えよう．このとき，先の (1), (2) と次の (4), (5) とは同値である；

$$\text{(4)} \quad *da = -da$$

$$\text{(5)} \quad d*a + a \wedge *a = 0.$$

(Self-dual solution がほしければ，$\overline{\sigma}$ の定義を anti-self-dual になる様にかえればよい．同じ a によって (3) で作った A がちゃんと self-dual になる．つまりどうこうの方程式も a のレベルでは anti-self-duality になおる訳である．)

ρを実数値函数とする．もし $a = d\log\rho$ と書かれるなら，
(4) は自動的に満たされ，(5) は次の様になる；

$$
\begin{aligned}
& d * d\log\rho + d\log\rho \wedge * d\log\rho \\
= \; & \frac{1}{\rho} d*d\rho - \frac{1}{\rho^2} d\rho \wedge * d\rho + \frac{1}{\rho^2} d\rho \wedge * d\rho \\
= \; & \frac{1}{\rho} d*d\rho \\
= \; & -\frac{1}{\rho} *(\Delta\rho).
\end{aligned}
$$

Δ はラプラシアン．

従って (5) は $\frac{1}{\rho}\Delta\rho = 0$ と同値．

1-instanton solution を得るには

(6) $\rho = 1 + \lambda^2 / \sum_{\mu=0}^{3} (x_\mu - y_\mu)^2$

$\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0,\ y = (y_0, \cdots, y_3) \in \mathbb{R}^4$

とすればよい．

$$(\partial_\mu)^2 \rho = -2\lambda^2 / \left(\sum_\nu (x_\nu - y_\nu)^2\right)^2 + 8\lambda^2 (x_\mu - y_\mu)^2 / \left(\sum_\nu (x_\nu - y_\nu)^2\right)^3$$

ゆえ $\Delta\rho = 0$ となっている．

定理．　1-instanton solution は (6) の形の ρ を用いて

(7) $A = *(d\log\rho \wedge \sigma)$

と表わされるものに限る．

証明．[4] によれば，instanton solution はその複素領域に於ける poles の場所だけによって unique に定まる．但しここで扱う singularity は gauge 変換で消すことの出来ないも

ののみである．

そこで，まず領域を複素化しよう．(1)，(2) は conformal invariant なので方程式は $S^4 \supset \mathbb{R}^4$ で定義されているとしてよい．但し $S^4 = \{ t = (t_1, \cdots, t_5) \in \mathbb{R}^5 \mid t_1^2 + \cdots + t_5^2 = 1 \}$．

このとき，

$$G_r \underset{def}{=\!=} \{ z = (z_0 : \cdots : z_5) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5 \mid z_0^2 = z_1^2 + \cdots + z_5^2 \}$$

と定めれば，G_r は S^4 の自然な複素化と見なせるであろう．

$$\underset{(x_0, x_1, x_2, x_3)}{\mathbb{R}^4} \hookrightarrow S^4 \hookrightarrow G_r \hookrightarrow \underset{(z_0 : z_1 : \cdots : z_5)}{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5}$$

による $\mathbb{R}^4$ の $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ へのうめこみは，

$$(8) \qquad x_0 = z_4/(z_0+z_1), \qquad x_1 = z_5/(z_0+z_1)$$
$$x_2 = z_2/(z_0+z_1), \qquad x_3 = z_3/(z_0+z_1)$$

によって与えられる．

さて，(7) の pole で gauge 変換で消せないものは，方程式 $\rho = 0$ で定義される G_r の divisor であることが判るから，それを $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ の divisor と G_r との intersection として表示しよう．その $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ の divisor の定義方程式は

$$(9) \qquad (y^2 + \lambda^2 + 1) z_0 + (y^2 + \lambda^2 - 1) z_1$$
$$- 2 y_2 z_2 - 2 y_3 z_3 - 2 y_0 z_4 - 2 y_1 z_5 = 0$$
$$y^2 = \sum_{\mu=0}^{3} y_\mu^2 .$$

である．

(この様に，1-instanton には degree 1 の divisor が対応する．一般に，k-instanton には degree k の $\underbrace{\text{divisor}}_{\text{reduced}}$ が対応する．但し $\mathrm{Pic}(Gr) \cong \mathbb{Z}$ に注意．)

さて，$\sum_{l=0}^{5} c_l z_l = 0$ なる hyperplane $H \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ による section が instanton の pole であるとすると，

① $c_l \in \mathbb{R}$ $\quad l = 0, \cdots, 5$.

② $H \cap S^4 = \phi$

が成り立つ．([4].) この条件を少し書きかえてみよう．2次形式 $z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 - z_5^2$ によって同型

$\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}})^*$ を定めれば，hyperplane は次のように点に対応する；

$$H = \{ z \in \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}} \mid \Sigma c_l z_l = 0 \} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}}{\underset{\cap}{(c_0 ; -c_1 ; -c_2 ; -c_3 ; -c_4 ; -c_5)}}.$$

$\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ の同次座標 $(z_0 : \cdots : z_5)$ に関する complex conjugation による fixed point set を $\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$ で表わせば，$S^4 = Gr \cap \mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$.

したがって，条件 ①, ② は

①′ $\quad c = (c_0 ; -c_1 ; \cdots ; -c_5) \in \mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$

②′ $\quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 < c_0^2$

と同値であることが計算によって確められる．これは $\mathbb{R}^5$ の単位球面の内側を表わしている．

一方，(9) なる hyperplane に対応する点

$(y^2+\lambda^2+1\,;\,-y^2-\lambda^2+1\,;\,2y_2\,;\,2y_3\,;\,2y_0\,;\,2y_1)$
によって ①′, ②′ を満たすすべての C が尽くされるから，
これで，すべての 1-instanton solution が (7) によって得
られることが判る．$\square$．

§.2．

A は，底空間を S^4, fibre を $SU(2)$ にもつ C^ω-principal
bundle $\mathbb{P}$ の connection としても解釈出来る．このとき F は
curvature であり，gauge 変換とは bundle automorphism
による connection form の引きもどしを指している．

$\mathbb{P}$ に associate した rank 2-vector bundle を E で表わす．
$E = \mathbb{P} \times_{SU(2)} \mathbb{C}^2$．[4] に示した様に E は S^4 から Gr に
「解析接続」出来る．その証明には Atiyah-Ward [1] によ
って作られた $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ 上の algebraic vector bundle を full に用いた
のだが，実はそのことは本質的ではない．実際，M. Maruyama
[2] による elementary transform を用いて，E から直接に
$Gr \setminus \{1点\}$ 上の「解析接続された」alg. vector bundle を構成
出来る場合がある．しかし [4] でこの構成法を用いなかった
のは，ひとつには次の問題が解けなかったことによる；

問題．$S^4 = \{ t \in \mathbb{R}^5 \mid t_1^2 + \cdots + t_5^2 = 1 \}$ によって

実4次元球面 S^4 に自然な real algebraic structure を入れるとき，底空間を S^4，fibre を $\mathbb{C}^n$ とする real algebraic bundles E, F が real analytic に同型ならば，real algebraic にも同型か？

これは次の様に言いかえてもよい．

問題．S^4 上の real algebraic vector bundle で同じ Second Chern class を持つものは unique か？

さて，Instanton A に対応して定まる $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ 上の algebraic vector bundle of rank 2 を $E(A)$ で表わすとき，$E(A)|_\ell$ キ自明 となる様な projective line $\ell \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ を A の jumping line と呼ぶ．

§1 で定義した Gr は実は $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ の lines を分類するグラマン多様体であり，したがって A の jumping line たちは $Gr = Gr(1,3)$ の subset を為す．それを $J(A)$ と書くと，$J(A)$ は $Gr(1,3)$ の divisor であり，E は $Gr \setminus J(A)$ 上の (affine)-algebraic vector bundle $\widetilde{E}_A$ に解析接続出来，それにともなって A も $\widetilde{E}_A$ の (1,0)-型解析的接続 $\widehat{A}$ に解析接続出来るのであった．このとき，$\widehat{A}$ は $J(A)$ には解析接続出来な

いことが言える；

$Fl = Fl(0,1,3) \hookrightarrow Gr(1,3)\times \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ を flag 多様体，
$\alpha : Fl \longrightarrow Gr$, $\beta : Fl \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ を natural projection とする．また $\bar{\alpha} = \alpha|_{Fl\setminus\alpha^{-1}(J(A))}$ ， $\bar{\beta} = \beta|_{Fl\setminus\alpha^{-1}(J(A))}$ とおく．$\tau = \alpha\circ\beta^{-1}$ ， $\bar{\tau} = \bar{\alpha}\circ\bar{\beta}^{-1}$ は flag を graph にもつ algebraic correspondence である．

$$\begin{tikzcd} & Fl \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ Gr & & \mathbb{P}^3 \arrow[ll, squiggly, "\tau"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Fl\setminus\alpha^{-1}(J(A)) \arrow[dl, "\bar{\alpha}"'] \arrow[dr, "\bar{\beta}"] & \\ Gr\setminus J(A) & & \mathbb{P}^3 \arrow[ll, squiggly, "\bar{\tau}"] \end{tikzcd}$$

[3] の命題3 は，$\forall \zeta\in\mathbb{P}^3$ に対し，
$\widehat{A}|_{\bar{\tau}(\zeta)}$ が $\widetilde{E}_A|_{\bar{\tau}(\zeta)}$ の flat connection であることを主張している．さて，もし $\widehat{A}|_{\bar{\tau}(\zeta)}$ が，$J(A)$ の $\tau(\zeta)$ のある component X まで拡張されたとすると，$\widetilde{E}_A|_{\bar{\tau}(\zeta)}$ の flat section は X 上に flat に拡張される．$\widetilde{E}_A = \alpha_*\beta^*E(A)|_{Gr-J(A)}$ によって $\widetilde{E}_A$ を作ったことを思い出せば（[4]），X に対応する $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ の line は jumping line ではない．これは矛盾．

$\widetilde{E}_A$ を $\bar{\alpha}$ で持ち上げた bundle $\bar{\alpha}^*\widetilde{E}_A$ は，自然に
$\beta^*E(A)|_{Fl\setminus\alpha^{-1}(J(A))}$ と同型である．従って $\bar{\alpha}^*\widehat{A}$ は $\beta^*E(A)$ の connection と思うとき，singularity を有している．しかし $\forall\zeta\in\mathbb{P}^3$ に対して $\bar{\alpha}^*\widehat{A}|_{\beta^{-1}(\zeta)}$ が flat であ

ることには変わりない．ところで $\beta^*E(A)|_{\beta^{-1}(\zeta)}$ は trivial bundle だから，$\beta^{-1}(\zeta)\cong\tau(\zeta)\cong\mathbb{P}^2$ 上の方程式

$$dY+\left(\bar{\alpha}^*\hat{A}|_{\beta^{-1}(\zeta)}\right)\cdot Y=0$$

$$\Longleftrightarrow dY+(\hat{A}|_{\tau(\zeta)})\cdot Y=0$$ は integrable で，monodromy を持たない線型微分方程式である．

従って，$\tau(\zeta)\hookrightarrow Gr$ が $\zeta\in\mathbb{P}^3$ に holomorphic によることを考えれば，$(\hat{E}_A,\hat{A})$ は，integrable な線型微分方程式

$$(10)\quad dY+B(\zeta)\cdot Y=0,$$
$$B(\zeta)=\hat{A}|_{\tau(\zeta)},$$

の monodromy preserving deformation とも考えられる．しかし total space Gr 上で $\hat{A}$ は flat にはなっていないことに注意．$\tau(\zeta)$ に制限したときだけ flat (integrable) なのである．また，monodromy も $\tau(\zeta)$ に制限したときに（だけ）出て来ない訳である．

$E(A)$ の ζ に於ける fibre は，方程式 (10) の解空間と自然に同一視出来る．

$B(\zeta)=\hat{A}|_{\tau(\zeta)}$ は $\tau(\zeta)\cap J(A)$ の generic point では simple pole になっている．これは，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の変形 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell))$，$\ell\equiv 0 \bmod 2$ （ここに，

vector bundle $E \to \mathbb{P}^1$ に対して各 fibre を projectify して作った $\mathbb{P}^{n-1}$-bundle を $\mathbb{P}(E)$ で表わす。）を general に変形して $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に持ってゆくとき，必ず途中で $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ を経過する，ということと，この $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ の universal family が 1次元であるということとに対応している。

こういった complex manifold の変形との関係については，「線型微分方程式の超局所解析，1979年1月」の報告集で詳しく論ずることにする。

$Gr(1,3)$ のどんな divisor が instanton の pole になり得るのか，は残念ながらよく判らない。1-instanton の時には容易だった計算も，一般になるとたんに面倒になり，今のところよい必要条件が求められないでいる。次数 k の divisor 全体の次元から見れば，k-instanton の次元 $8k-3$ は随分小さい。どういう制限が働いてこうなるのか，はこのような方法では今の所さっぱり判らない。

（1979年早春. Do A.K.m.p.!）

文献

[1] Atiyah, M.F. & Ward, R.S. : Instantons and Algebraic Geometry. Commun. Math. Phys. 55, 117–124 (1977)

[2] Maruyama, M. : On a family of algebraic vector bundles. Akizuki Volume. Kinokuniya, 95–146 (1973)

[3] 村瀬元彦 : Classical Euclidean Yang-Mills 場に於ける Self-Duality の幾何学的意味について. 数理研講究録 324. 64–96 (1978)

[4] ——— : Yang-Mills 方程式の解の空間について. 城崎代数幾何 symposium, 1978年12月.

[5] Jackiw, R., Nohl, C., & Rebbi, C. : Conformal properties of pseudoparticle configurations. Phys. Review D. 15, 1642–1646 (1977).